导数_题集4

试题

T1

> 新月

设函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+x(0\leq x\leq 2\pi)$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程 .
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间 .

附：$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

T2

> 新月

设函数 $f(x)=ax^3-x^2-2\cos x(a\in\mathbb{R})$.
(1) 若 $a=0$，求 $f(x)$ 的单调区间.
(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围.

T3

> 上弦月

2025年成都七中高三12月阶段性考试
已知 $x(\ln x+2)\leq ax^2+\frac{2}{a}\ln x$ 对 $\forall x\geq e$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______ .

T4

> 上弦月

已知函数 $f(x)=a\ln x+x+b-a$ 在区间 $[1,e]$ 上有零点，若 $a^2+b^2\geq m$ 恒成立，则 m 的最大值为 ______ .

T5

> 上弦月

设函数 $f(x)=ax+\sin x+\cos x$，若 $f(x)$ 的图像上存在不同的两点 A,B 使得 $f(x)$ 在 A,B 点处的切线互相垂直，则实数 a 的取值范围是 ______ .

T6

> 上弦月

2011 年浙江卷
设函数 $f(x)=(x-a)^2\ln x$，$a\in\mathbb{R}$.
(1) 若 $x=e$ 为 $y=f(x)$ 的极值点，求实数 a .
(2) 求实数 a 的取值范围，使得对任意的 $x\in(0,3e]$，恒有 $f(x)\le 4e^2$ 成立.

T7

> 上弦月

(1) 证明：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\tan x>x$.
(2) 设方程 $\tan x=x$ 的正根从小到大依次排列，第 n 个为 x_n ($n\in\mathbb{N}$*) . 证明：

$$\pi<x_{n+1}-x_n<\pi+\frac{1}{(n^2+n)\pi}$$

T8

> 上弦月

2022-2023极光杯跨年线上测试
设函数 $f(x)=3\sin 2x+2\sin 3x\cos x+ax$，$a\in\mathbb{R}$.
(1) 若 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，求 a .
(2) 若 $f(x)$ 单调递增，求 a 的取值范围.
(3) 证明：对任意 $n\in\mathbb{N}$*，$\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2^{2n-2}x+\cos 2^{2n-1}x+n\ge 0$.

T9

上弦月

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln\frac{x}{a}(a\neq 0)$
(1) 当 $x>0$，$a>0$ 时，求 $f(x)$ 的零点个数.
(2) 当 $x<0$，$a<0$ 时，求 $f(x)$ 的零点个数.

答案

T1

答案：(1) $y=\pi$ (2) 单增区间是 $(0,\frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，$(\frac{5\pi}{3},2\pi)$；单减区间是 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，$(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3})$.
提示：比较简单 .

T2

答案：(1) 单增区间为 $(-\infty,0)$，单减区间为 $(0,+\infty)$ (2) $[\frac{2}{3\pi},+\infty)$
提示：第二问即 $3ax^2-2x+2\sin x\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立。优先考虑分离参数，当 $x=0$ 时，不等式成立；当 $x>0$ 时，有

$$a\geq\frac{2(x-\sin x)}{3x^2}$$

然后判别有无未定式。显然当 $x=0$ 时，右边是未定式 $\frac{0}{0}$，这说明分参的做法有风险。但如果我们坚持继续讨论函数 $g(x)=\frac{2(x-\sin x)}{3x^2}$ 的性质，容易得出其最大值为 $g(\pi)=\frac{2}{3\pi}$，并非 $x\to 0$ 处的极限值，所以 $a\geq\frac{2}{3\pi}$ 。

从端点效应的角度看，本题是典型的“端点效应失效”问题，类似的还有2020年全国一卷理科数学的导数题。我一直对端点效益这种手段、以及恬不知耻的命题人根据端点效应出的劣质导数题深恶痛绝。对于”恒成立求参数取值范围“这种古老的题型，坚持使用最朴素的两种方法——分离参数和分类讨论。

T3

答案：$[\frac{2}{e},+\infty)\cup\{\frac{2}{e^2}\}$
提示：显然 $a>0$ 。不等式可以写成 $(ax-2)(\ln x-ax)\leq 0$，有两种情形：

- $\ln x-ax\leq 0$ 恒成立，即 $a\geq\frac{1}{e}$ ，此时必须有 $ax-2\geq 0$ 恒成立，则 $ae-2\geq 0$，得 $a\geq\frac{2}{e}$ ，综合两个范围可得 $a\geq\frac{2}{e}$ 。
- $\ln x-ax$ 有两个零点 x_1,x_2，不妨设 x_2 是较大的零点，则 x_2 必须也是 $ax-2$ 的零点（从“穿根引线”的角度来看，相当于重根，此时穿根引线不穿过 x 轴），于是 $x_2=\frac{2}{a}$，即

$\ln\frac{2}{a}-2=0$，解得 $a=\frac{2}{e^2}$ 。这里还有一个比较隐晦的点，那就是较小的零点 x_1 还要满足 $x_1\le e$（因为在 x_1 处，穿根引线会穿过 x 轴），但容易验证当 $a=\frac{2}{e^2}$ 时，确实有 $x_1<e$ ，因为 $\ln e-\frac{2}{e^2}\cdot e>0$ 。

T4

答案： $\frac{1}{2}$
提示：套路题。有两种方法：

- 设零点为 x_0，则 $a\ln x_0+x_0+b-a=0$，写成 $b=(1-\ln x_0)a-x_0$，可以看成直线的斜截式方程，点 (a,b) 在这条直线上，则 a^2+b^2 就是点 (a,b) 到原点距离的平方，其最小值就是原点到该直线的距离的平方，即 $(a^2+b^2)_{min}=\frac{x_0^2}{(1-\ln x_0)^2+1}$，求导后容易证明函数 $\frac{x^2}{(1-\ln x)^2+1}$ 是单调递增的，其最小值在 $x_0=1$ 处取到，为 $\frac{1}{2}$ 。
- 设零点为 x_0，则 $a\ln x_0+x_0+b-a=0$，根据柯西不等式：

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2\le(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$$

可得 $0=(1-\ln x_0)a-b-x_0\le\sqrt{[(\ln x_0-1)^2+1](a^2+b^2)}-x_0$ ，于是 $a^2+b^2\ge\frac{x_0^2}{(1-\ln x_0)^2+1}$，之后同上。

这类题目的源头是 **2022年天津卷导数题：**

> 已知 $f(x)=e^x-a\sin x$，$g(x)=b\sqrt{x}$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有公共点，证明：$a^2+b^2>e$.

T5

答案：$[-1,1]$
提示：$f'(x)=a+\cos x-\sin x$，由题意知存在 $x_1\ne x_2$，使得

$$f'(x_1)f'(x_2)=-1$$

成立，关键是如何翻译这个条件。假设 $f'(x)$ 的值域是 $[b,c]$，其中 $b<0$，$c>0$，容易知道 $f'(x_1)f'(x_2)$ 的取值范围是 $[bc,c^2]$ 。所以，只需要保证 $bc\le-1$ 即可。
容易求出 $f'(x)$ 的值域为 $[a-\sqrt{2},a+\sqrt{2}]$，所以 $a^2-2\le-1$ ，解得 $-1\le a\le 1$ 。

T6

答案：(1) e 或 $3e$ (2) $[3e-\frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}},3e]$
提示： 本题也是典中典中典，教科书级别的导数题。

第一问根据 $f'(e)=0$ 求出 $a=e$ 或 $a=3e$，但是这只是极值点的必要条件，还要检验是否为“变号”零点，经检验两个解都符合题意。
第二问是一个典型的“恒成立求参数取值范围”问题，(按照我的原则)优先考虑分离参数。首先显然当 $x<1$ 时，不等式肯定成立；于是考虑 $x>1$，就有：

$$-\frac{2e}{\sqrt{\ln x}} \le x-a \le \frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$$

进而

$$x-\frac{2e}{\sqrt{\ln x}} \le a \le x+\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$$

你可能会想：这么奇怪的函数能求最值？还真能。实际上，只要没有出现未定式，我们都可以放心地求导、求最值。首先左边的函数显然单增，于是

$$a \ge 3e-\frac{2e}{\sqrt{\ln 3e}}$$

右边的函数求导后可知其最大值在 $x=e$ 的时候取到，为 $3e$，则

$$a \le 3e$$

综上，$3e-\frac{2e}{\sqrt{\ln 3e}} \le a \le 3e$ 。
这道题目之所以称为经典，除了考场上不太敢用的分参（因为 a 在平方内），还在于解法的多样性。其实本题也可以正常对 $f(x)$ 求导讨论，用隐零点的方法解决，读者不妨一试。

T7

答案：略
提示：
第一问是平凡的，意义在于提示了第二问需要使用不等式 $\tan x>x$ 。
第二问，显然 $n\pi<x_n<(n+\frac{1}{2})\pi$ ，由于 x_n 和 x_{n+1} 不在 $\tan x$ 的同一个单调区间上，自然要想到把它们都转化到同一单调区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上。由于 $x_n-n\pi\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，这就完成了转化，其中的 $n\pi$ 是可以通过 $\tan x$ 的周期性消去的。于是

$$\tan(x_n-n\pi)=\tan x_n=x_n$$
$$\tan(x_{n+1}-(n+1)\pi)=\tan x_{n+1}=x_{n+1}$$

由于 $x_{n+1}>x_n$，故 $\tan(x_{n+1}-(n+1)\pi)>\tan(x_n-n\pi)$ ，利用 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的单调性得

$$x_{n+1}-(n+1)\pi>x_n-n\pi$$

即 $x_{n+1}-x_n>\pi$ ，左边不等式得证。
直觉上，右边的不等式不能像左边一样简单通过单调性证明，肯定需要放缩，而题目第一问明确提示了不等式 $\tan x>x$ ，这个不等式的成立条件是 $0<x<\frac{\pi}{2}$，注意到
$x_{n+1}-x_n-\pi\in(0,\frac{\pi}{2})$，故

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}-x_n-\pi &< \tan(x_{n+1}-x_n-\pi)\\
&= \tan(x_{n+1}-x_n)\\
&= \frac{\tan x_{n+1}-\tan x_n}{1+\tan x_{n+1}\tan x_n}\\
&= \frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_nx_{n+1}}
\end{aligned}
$$

整理得 $x_{n+1}-x_n-\pi<\frac{\pi}{x_nx_{n+1}}$，又因为 $x_n>n\pi$，$x_{n+1}>(n+1)\pi$，故

$$
x_{n+1}-x_n-\pi<\frac{\pi}{n(n+1)\pi^2}=\frac{1}{(n^2+n)\pi}
$$

右边不等式得证。

贯穿本题始终的一个思想，就是把 x_n 和 x_{n+1} 分别减去 $n\pi$ 和 $(n+1)\pi$，转化到同一单增区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上。这样不仅能利用 $\tan x$ 的单调性解决左边不等式，还能用不等式 $\tan x>x$ 解决右边不等式。

T8

答案：(1) -11 (2) $[6,+\infty)$ (3) 略
提示：本题的第一个难点是三角恒等变换：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 6\cos 2x+6\cos 3x\cos x-2\sin 3x\sin x+a\\
&= 4\cos 4x+8\cos 2x+a\\
&= 8\cos^2 2x+8\cos 2x+a-4\\
&= 8(\cos 2x+\frac{1}{2})^2+a-6\\
&\geq a-6
\end{aligned}
$$

其中用到了积化和差：

$$
\begin{aligned}
\cos\theta\cos\alpha &= \frac{1}{2}\Big[\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)\Big]\\
\sin\theta\sin\alpha &= \frac{1}{2}\Big[\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)\Big]
\end{aligned}
$$

第二问，由 $f'(x)\geq 0$ 知 $a-6\geq 0$，则 $a\geq 6$ 。
第三问，首先需要思考前两问提示了我们什么不等式。在求解第二问的过程中，我们计算出了

$$
2\cos 2x+\cos 4x\geq -\frac{3}{2}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
2\cos 2x+\cos 4x &\geq -\frac{3}{2} \\
2\cos 4x+\cos 8x &\geq -\frac{3}{2} \\
2\cos 8x+\cos 16x &\geq -\frac{3}{2} \\
&\cdots \\
2\cos 2^{2n-2}x+\cos 2^{2n-1}x &\geq -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

把这 $2n-2$ 个不等式累加，得到

$$2\cos 2x+3(\cos 4x+\cos 8x+\cdots+\cos 2^{2n-2}x)+\cos 2^{2n-1}x\geq 3-3n$$

又因为 $\cos 2x+2\cos 2^{2n-1}x\geq -3$ （显然），把上面的式子加上这部分，就有

$$\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2^{2n-1}x\geq -n$$

证毕。
本题与 **2020年全国二卷[理]** 的导数题非常相似：

> 已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$.
> (1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性.
> (2) 证明：$|f(x)|\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.
> (3) 设 $n\in\mathbb{N}^*$，证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x\leq \frac{3^n}{4^n}$.

T9

答案：(1) $0<a<\frac{1}{e}$ 时两个零点；$a=\frac{1}{e}$ 时一个零点；$a>\frac{1}{e}$ 时无零点。 (2) $-e\leq a<0$ 时一个零点；$a>-e$ 时三个零点。
提示：本题精彩至极。
先求导： $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}=\frac{axe^x-1}{x}$ 。

第一问有 $a>0,x>0$，则 axe^x-1 是递增的，而且显然有一个零点 x_0，就是 $f(x)$ 的最小值点。考虑到当 $x\to 0$，$f(x)\to -\infty$；当 $x\to +\infty$，$f(x)\to +\infty$，故 $f(x)$ 的零点个数完全由最小值 $f(x_0)$ 的正负性决定。这是一个隐零点问题，隐零点 x_0 满足 $ax_0e^{x_0}-1=0$，下面计算的时候，优先考虑把参数 a 消去：

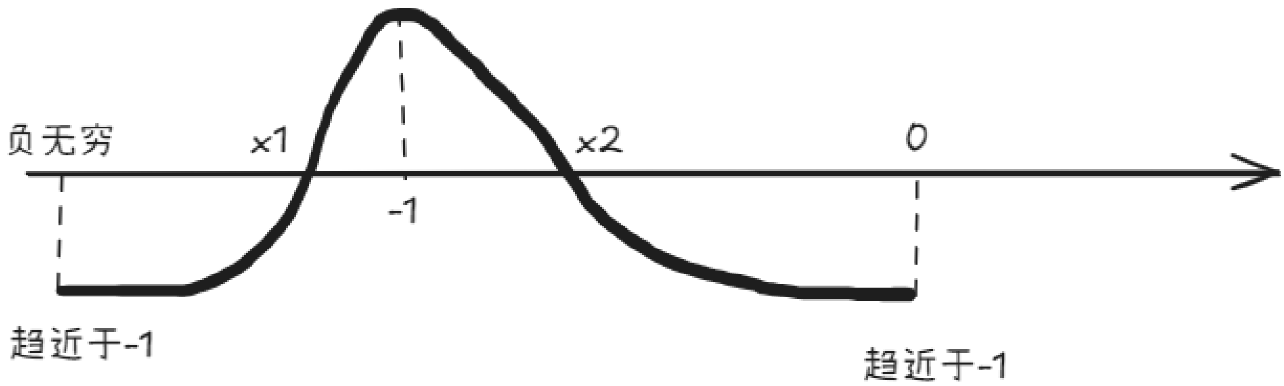
$$
\begin{aligned}
f(x_0)&=ae^{x_0}-\ln\frac{x_0}{a} \\
&=\frac{1}{x_0}-x_0-2\ln x_0
\end{aligned}
$$

构造函数 $g(x)=\frac{1}{x}-x-2\ln x$，求导容易证明 $g(x)$ 单减，再考虑到 $g(1)=0$，故我们有：

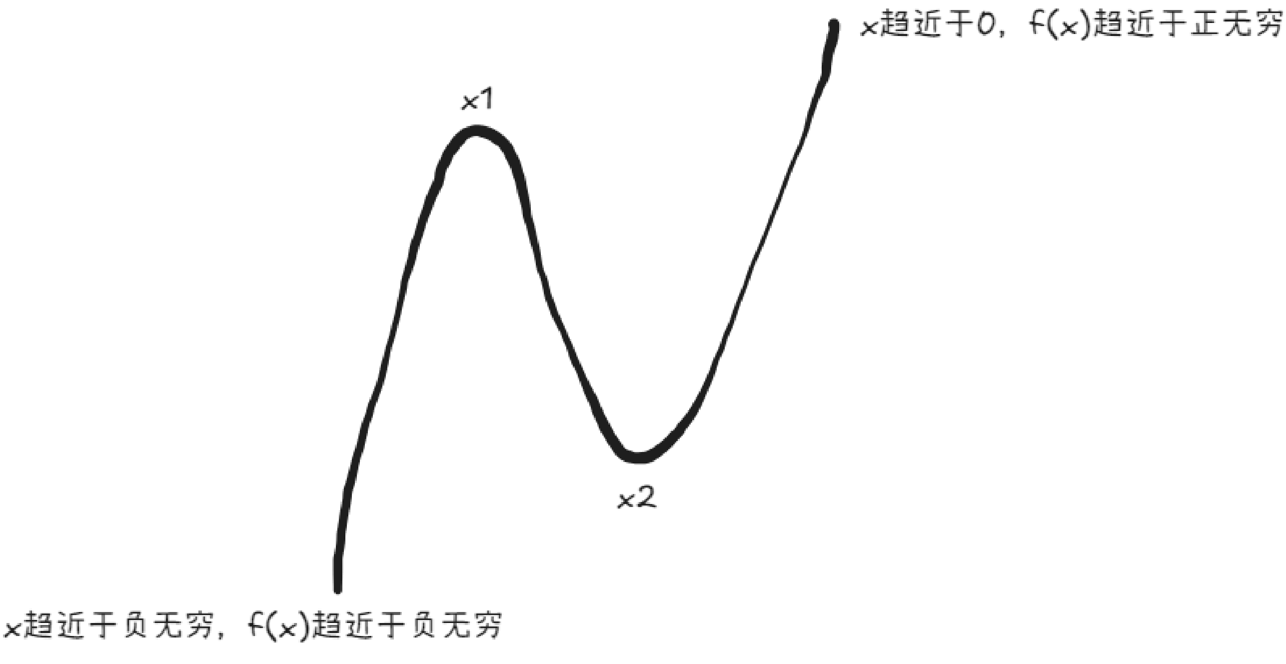
- 当 $0<x_0<1$，即 $f'(1)>0\Longrightarrow a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x_0)>0$，$f(x)$ 无零点；
- 当 $x_0=1$，即 $f'(1)=0\Longrightarrow a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x_0)=0$，$f(x)$ 有一个零点；
- 当 $x_0>1$，即 $f'(1)<0\Longrightarrow 0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x_0)<0$，$f(x)$ 有两个零点。

第二问，重新审视一下 $axe^x - 1$ 这个函数，求导易证其先增后减，最大值在 $x=-1$ 处，为 $-\frac{a}{e}-1$，再考虑到 $x\to 0$ 时，$axe^x-1\to -1$；$x\to-\infty$ 时，$axe^x-1\to-1$ 。于是这个函数的零点（对应着 $f(x)$ 的极值点）根据其最大值 $-\frac{a}{e}-1$ 的正负，有三种情形：

- 当 $-\frac{a}{e}-1<0$ ，即 $a>-e$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立（注意分母的 x 是负的），$f(x)$ 单调递增。再由 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$；$x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故此时 $f(x)$ 有一个零点；
- 当 $-\frac{a}{e}-1=0$，即 $a=-e$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，跟上面一样，$f(x)$ 有一个零点；
- 当 $-\frac{a}{e}-1<0$，即 $a<-e$ 时，axe^x-1 有两个零点 x_1,x_2，图象大致如下：



这里的 x_1,x_2 应该分别是 $f(x)$ 的极大值点和极小值点（还是因为 $f'(x)$ 分母的 x 是负的）。于是函数 $f(x)$ 的图像大致如下：



于是 $f(x)$ 的零点个数由极大值 $f(x_1)$ 和极小值 $f(x_2)$ 的正负决定。这又是一个隐零点问题，隐零点 x_1,x_2 满足方程 $axe^x-1=0$，跟第一问类似，计算出：

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}-x_1-2\ln(-x_1)$$
$$f(x_2)=\frac{1}{x_2}-x_2-2\ln(-x_2)$$

注意由于 x_1, x_2 是负的，$\ln x_1^2$ 应该等于 $2\ln(-x_1)$，这里跟第一问是不一样的。
要判断 $f(x_1), f(x_2)$ 的正负性，我们构造函数 $h(x) = \frac{1}{x} - x - 2\ln(-x), x < 0$，求导容易证明 $h(x)$ 是单调递减的，再考虑到 $h(-1) = 0$，以及 $x_1 < -1 < x_2$ ，可得 $f(x_1) > 0$，$f(x_2) < 0$，从而函数 $f(x)$ 有三个零点。

第二问很有趣，$f(x)$ 的零点个数随着 a 的改变，直接跳过了“两个零点”的情形，只可能是一个零点或者三个零点。